# Л.Д.Фаддеев
## (к 60-летию со дня рождения)

В марте 1994 г. исполняется 60 лет Л.Д.Фаддееву. В короткой статье непросто описать все принадлежащие ему результаты; многие из них вошли в рабочий аппарат математики и теоретической физики. Одно из важнейших открытий великих математиков прошлого - от Эйлера и Гаусса до Гильберта, Германа Вейля и наших современников - состоит в единстве всей математики - алгебры, геометрии, анализа, теории чисел и т.д. без всяких исключений. Работы Л.Д. добавили к этому списку, в качестве его равноправной составной части, многие разделы современой теоретической физики. На протяжении жизни одного поколения математическая физика полностью изменила свое лицо, и Л.Д. неизменно был одним из ведущих участников этого увлекательного процесса. Если еще в 60-е гг. имела некоторое основание известная шутка о том, что брак математики и физики, заключенный в XVIII-XIX в., окончился разводом, то спустя всего несколько лет положение полностью изменилось, причем можно говорить об обратном влиянии теоретической физики на математику ( влиянии, важность которого Л.Д. всегда любил подчеркивать). Достаточно упомянуть, например, что одним из важнейших открытий последнего времени в топологии стала квантовая теория поля. (При этом основной аппарат, связанный с приложениями квантовой теории поля в топологии, основан на знаменитой работе Л.Д. о квантовании калибровочных полей.)

Л.Д. родился 7 марта 1934 г. в семье замечательных математиков Д.К. и В.Н. Фаддеевых. Д.К. был сотрудником МИАН со времени его основания (1934) и одним из первых сотрудников ЛОМИ с момента его воссоздания в 1940 г.(после 5-летннего перерыва, вызванного переводом Академии в Москву).

Л.Д. получил образование на физическом факультете Ленинградского университета. На физическом факультете тех времен ощущалась непосредственная связь с традициями С.-Петербургской математической школы и с начальной «героической» эпохой квантовой теории, воплощенная в таких замечательных людях, как В.И.Смирнов и В.А.Фок.(Можно заметить, что ленинградский физфак всегда был отличным местом для изучения математики, в то время как математики с «матмеховсим» образованием обычно уже на младших курсах теряют способность воспринимать физику (разумеется, есть и исключения).)

Первые работы Л.Д., начатые еще в студнческом семинаре, организованном О.А. Ладыженской, связаны с математическим обоснованием теории рассеяния - теорией возмущений непрерывного спектра, дисперсионными соотношениями и обратной задачей для одномерного уравнения Шредингера. За этим последовала знаменитая работа о трехчастичном рассеянии. Эта работа вызвала огромный интерес у теоретиков, занимающихся прикладными аспектами квантовой физики (теория атомных столкновений, теория ядра) и породила поистине необъятную литературу (через 30 лет она остается одной из наиболее часто цитируемых работ в научной литературе). Вместе с тем она представляла собой и значительное техническое достижение с точки зрения чистой математики: это был один из первых примеров исчерпывающего изучения дифференциального оператора со сложной структурой непрерывного спектра. Интересно, что одна из основных идей этой работы - перестройка интегральных уравнений теории рассеяния в так назывемые уравнения Фаддеева, позволяющая контролировать вклад непрерывного спектра, возникла у Л.Д. под влиянием изучения модели Тирринга - простейшей(но уже далеко нетривиальной) модели квантовой теории поля. Через 15 лет та же модель Тирринга вновь сыграла важную роль в работах по квантовому методу обратной задачи.

Одним из первых примеров обратного влияния теоретической физики на математику, о котором говорилось выше, стала написанная немного позже работа Л.Д. по теории автоморфных функций. Здесь опыт квантовой механики оказался полезен при изучении оператора Лапласа на некомпактных римановых поверхностях. Л.Д принадлежит первое полное доказательство теоремы разложения и формулы следа Сельберга для некомпактных римановых поверхностей конечного объема (результаты самого Сельберга в то время оставались неопубликованными). Вместе с Б.С.Павловым Л.Д. предложил и интересную нестационарную формулировку задачи рассеяния для автомофных функций, позволяющую интерпретировать нули $\zeta$-функции Римана как квантовомеханические резонансы.

Интерес к проблемам квантовой теории поля сформировался у Л.Д. еще в студенческие годы. В это время квантовая теория поля особой популярностью не пользовалась - ее позиции казались полностью подорванными как целым десятилетием безуспешной работы с мезонными теориями, так и в особенности парадоксом нуль-заряда - обращением в нуль перенормированной константы связи в результате учета множественного рождения частиц. Вкладом Л.Д. в объяснение парадокса нуль-заряда стала его короткая заметка с Ф.А.Березиным: обращение в нуль взаимодействия было прослежено на модельном примере потенцалов нулевого радиуса, причем результат здесь можно получить как с помощью обычной для физиков логарифмической перенормировки заряда, так и вне рамок теории возмущений - с помощью теории расширений самосопряженных операторов. Это указывало, с одной стороны, на то, что парадокс нуль-заряда не является артефактом теории возмущений, а с другой - оставляло надежду на построение нетривиальных моделей теории поля, свободных от нуль-зарядных трудностей.

В середине 60-х гг. Л.Д. начинает заниматься теорией Янга-Миллса; к этому времени было осознано (в частности, Р.П.Фейнманом), что квантование теории Янга-Миллса стандартными методами, известными из квантовой электродинамики, ведет к трудностям и противоречиям (нарушению условия унитарности). При этом сама теория Янга-Миллса не воспринималась еще как фундаментальная теория, а скорее как модельный пример, предшествующий построению квантовой теории тяготения. В совместной работе с В.Н.Поповым Л.Д. впервые удалось предложить последовательную схему квантования теории Янга-Миллса. Основная идея состояла в корректном учете калибровочной инвариантности, т.е. переходе от потенциалов $A_\mu$ к классам эквивалентности (орбитам) полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями $A_\mu \to gA_\mu g^{-1} + \partial_\mu g g^{-1}$; именно классы эквивалентности становятся основными объектами теории. Реализовать идею редукции по калибровочной группе оказалось проще всего в формализме континуального интегрирования, где можно параметризовать классы эквивалентности калибровочных полей, введя вспомогательную поверхность, трансверсально пересекающую орбиты калибровочной группы, с помощью простого уравнения, фиксирующего калибровку, например, $\partial_\mu A^\mu = 0$. При замене переменных связанной с выбором калибровочного условия, возникает нетривиальный якобиан, оказывающийся детерминантом дифференциального оператора с переменными коэффициентами,зависящими от калибровочного поля и от выбора калибровки. Нетривиальность детерминанта приводит к модификации правил квантования. Якобиан может быть выражен через гауссов контиуальный интеграл по вспомогательным фермионным переменным, получившим название «духов Фаддеева-Попова». Инвариантное изложение этого подхода в статье Л.Д., открывающей первый номер журнала ТМФ, дало общий рецепт квантования систем со связями в формализме континуального интеграла. Работы Л.Д. по квантованию поля Янга-Миллса появились как раз в то время, когда роль калибровочных теорий в физике частиц была наконец правильно понята, что привело к возрождению интереса к квантовой теории поля в целом. В конце 60-х и в начале 70-х гг. были сформулированы объединенная модель электромагнитных и слабых взаимодействий Вейнберга - Салама - Глешоу и калибровочная теория сильных взаимодействий - квантовая хромодинамика. Как обнаружил впервые Г.'т Хоофт, калибровочные теории с полупростой структурной группой свободны от парадокса нуль-заряда. Все это способствовало тому, что метод Фаддеева -Попова быстро превратился в основной рабочий инструмент физиков-теоретиков. Признанию способствовала и ясность и простота метода - статья Фаддеева и Попова в Physics Letters уместилась на двух страницах, в то время как альтернативный метод Б.Де Витта потребовал для своего изложения трех многостраничных статей в Physical Review. Уже в первой статье Фаддеева и Попова отмечалось, что предложенный ими метод имеет весьма общий характер; в качестве другого приложения в ней были сформулированы правила квантования гравитационного поля. Намеченный авторами метод квантования гравитации был затем развит в нескольких публикациях. (Замечательно, что преобразование функционального интеграла к гамильтоновой форме позволило просто получить гамильтонову формулировку теории тяготения, что важно не только в квантовой, но и к классической теории в частности, в связи с проблемой положительности энергии. В 60-е гг. Л.Д. получил в связи с проблемой положительности один из лучших в то время результатов; полностью задача была решена спустя 10 лет Яу и Шеном, а затем более просто Виттеном.) К сожалению, возможности теории возмущений в квантовой гравитации сильно ограничены ее неперенормируемостью. Однако по мере того, как идеи квантовой теории поля проникали во все новые области математики - в теорию представлений, а затем и в топологию, универсальность и гибкость метода Фаддеева-Попова стали все более очевидными; усовершенствованный метод «духов» превратился в удобную когомологическую технику, непосредственно связанную с идеями суперсимметрии (метод BRST).

Работы по методу обратной задачи теории рассеяния были одной из важных тем исследований Л.Д. еще с конца 50-х гг. В это время им получено обобщение результатов Гельфанда-Левитана-Марченко на случай уравнения Шредингера на всей оси, исследованы (вместе с В.С.Бусла-евым) спектральные тождества следов для одномерного оператора Шредингера и, наконец, получено решающее продвижение в трехмерной обратной задаче. В конце 60-х - начале 70-х гг метод обратной задачи неожиданно оказался связан с захватывающими успехами в изучении нелинейных уравнений. Л.Д. с самого начала был одним из главных действующих лиц этого «героического периода», когда объем наших знаний об интегрируемых системах удваивался в промежуток между двумя конференциями. В теории интегрируемых нелинейных уравнений счастливым образом объединились все темы, которыми Л.Д. занимался в предшествующий период, - обратная задача теории рассеяния, тождества следов, гамильтонова механика. При этом вклад Л.Д. в развитие метода обратной задачи определялся не только его чисто техническими достижениями, но не в меньшей степени его ролью «играющего тренера»; именно в этот период сложилась возглавляемая Л.Д команда молодых сотрудников его лаборатории (в основном, выпускников ленинградского физфака, прошедших через семинар Л.Д. в ЛОМИ), принадлежать к которой все мы считали для себя большой честью.

Интерес Л.Д. к изучению нелинейных уравнений с самого начала был связан не столько с их ролью полезных моделей в механике сплошных сред, сколько с возможными их приложениями в квантовой теории поля. В этом отношении исключительно важную роль сыграло уравнение sine Gordon, лаксову пару и переменные действие-угол для которого Л.Д. построил вместе с Л.А.Тахтаджаном в 1973 г. Из этого результата следовала удивительная (пока еще квазиклассическая) картина спектра масс в квантовополевой релятивистской задаче: помимо частиц, соответствующих основному полю, в нем присутствовали еще солитоны и их связанные состояния; при этом солитоны несли нетривиальный заряд и их естествено было считать сильно взаимодействующими. Уравнение sine Gordon впервые указало на роль квазичастичных классических решений и, более общим образом, на богатство правильно выбранных нелинейных моделей в квантовой теории поля. Идеологическое влияние этой работы на теоретическую физику 70-х -80-х гг. было весьма значительным - из нее выросли солитонные решения в многомерных теориях (монополи ‘т Хоофта - Полякова), инстантонные решения в теории Янга - Миллса и, наконец, интерпретация адронов как солитонов в киральных теориях (Э.Виттен).

Параллельно с квазиклассическим квантованием солитонов в течение 70-х гг. идет поиск математического аппарата для точного решения двумерных квантовых моделей. Эти поиски привели к новому удачному синтезу - построению квантового метода обратной задачи, объединившему идеи классического метода обратной задачи с методами и результатами Р.Бакстера и Г.Бете. Удивительным образом, в точном решении квантовополевой гамильтоновой модели нашли свое место и «бутстрапные» амплитуды рассеяния ($S-$матрица Замолодчикова), изучавшиеся в 60-е гг. в противовес гамильтоновым методам в теории поля. Одним из побочных продуктов нового развития стала теория квантовых групп, выросшая из изучения квантового уравнения Янга-Бакстера (впервые осознанного в качестве интересного алгебраичского объекта именно в работах Л.Д. и его учеников)- и превратившаяся, после работ В.Дринфельда, в один из наиболее интересных сюжетов некоммутативной алгебры со времени открытия групп Ли. Вместе с Л.А.Тахтаджаном и Н.Ю.Решетихиным Л.Д. развил удобный и общий подход к квантованию групп и алгебр Ли, целиком основанный на использовании квантовых $R-$матриц. В последние годы этот подход привел к ряду важных продвижений- построению квантовых алгебр, отвечающих решеткам и произвольным графам, и квантовой деформации уравнений Книжника-Замолодчикова. Соответствующая квазиклассическая конструкция - теория классических $r-$матриц предложенная первоначально Е.К.Скляниным, позволила алгебраизировать классический метод обратной задачи и вместе с тем оказалась очень интересной с точки зрения симплектической и пуассоновой геометрии. Во всех этих результатах роль Л.Д. как активно работающего математика и вместе с тем как «играющего тренера» была исключительно велика.

В конце 80-х - начале 90-х гг. наметился еще один синтез: между гамильтоновыми методами, характерными для квантового метода обратной задачи, и конформной теорией поля.Ковариантность по отношению к конечномерным квантовым группам, естественно возникающая в конформных теориях, была осознана как часть (бесконечномерной) скрытой симметрии, характерной для интегрируемых моделей. Работы Л.Д этого периода способствовали прояснению скрытой квантовой симметрии и привели также к новым интересным решеточным моделям теории поля (в дискретном пространстве-времени), которые можно воспринимать также как нетривиальные примеры «некоммутативной геометрии» в духе А.Конна.

Заканчивая этот короткий текст, я не могу не коснуться не вполне юбилейной темы. Как и мои друзья и коллеги, я принадлежу к числу учеников Л.Д. и считаю это большой честью. К сожалению, школа Л.Д. переживает сейчас непростое время; это относится и к Академии Наук, и к науке в России в целом. За годы Советской Власти было сделано немало в направлении превращения Академии Наук в щедринскую «Де сиянс академию»; если этого не произошло, то исключительно потому, что во все времена в Академии оставались высокопрофессиональные и порядочные люди. Теперь оказалось, что экономическое давление может быть столь же разрушительным, как и политическое. Никто из нас, и в том числе сам Л.Д., не рассматривает это как повод для политического обскурантизма. Но независимо от исхода нынешнего российского кризиса некоторые вещи уже не вернутся; не вернется, видимо, и атмосфера ЛОМИческого «пятого этажа» - как не возвращается молодость. В свое время Л.Д. сам полушутя говаривал, что мы все засиделись под его зонтиком. «Зонтика» больше нет; фаддеевская школа рассеялась по Старому и Новому Свету. Все это создает не вполне праздничное настроение. Ну, что же! Let us face it! На пороге своего 60-летия Л.Д. по-прежнему остается самым молодым из нас, и все мы желаем ему многих лет счастливой и плодотворной работы.